ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ THƯỢNG THỦY

MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC RIÊNG VÀ ỨNG DỤNG

THÁI NGUYÊN, 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGÔ THƯỢNG THỦY

MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN METRIC RIÊNG VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN, 2019

Xác nhận	Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn	của người hướng dẫn Khoa học
	PGS. TS. Hà Trần Phương

Mục lục

Lời mở đầu **1**

Bảng kí hiệu **3**

Chương 1. Không gian metric riêng **4**

1.1 Định nghĩa và ví dụ về không gian metric riêng 4

1.2 Sự hội tụ trong không gian metric riêng 7

1.3 Metric riêng Hausdorff 12

1.4 Một số tính chất cơ bản của không gian metric riêng 16

Chương 2. Một số định lí về điểm bất động trong không gian metric riêng **20**

2.1 Định lí điểm bất động cho ánh xạ giãn 20

2.2 Định lí điểm bất động cho ánh xạ co đơn trị 28

2.3 Sự tồn tại nghiệm chung của các phương trình tích phân kiểu Volterra 37

Kết luận **41**

Tài liệu tham khảo **41**

Lời mở đầu

Các định lý điểm bất động đóng vai trò khá quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Những kết quả đầu tiên được biết đến đó là nguyên lý ánh xạ co Banach trên lớp các không gian metric đầy đủ. Về sau có rất nhiều tác giả mở rộng nguyên lý này với các điều kiện khác nhau của không gian và ánh xạ. Vào năm 1994, S. Matthews (xem [8]) là người đầu tiên đưa ra giới thiệu khái niệm *không gian metric riêng*. Đây là lớp không gian mở rộng tự nhiên từ không gian metric thông thường, có vai trò khá quan trọng và có một số ứng dụng trong việc phát triển toán lý thuyết, đặc biệt là các định lý điểm bất động. Trong một số năm trở lại đây, một số nhà Toán học đã nghiên cứu về không gian metric riêng và tính chất của nó, đồng thời tổng quát hóa và mở rộng được một số kết quả của S. Matthews.

Để tìm hiểu, nghiên cứu nhằm làm rõ hơn về các vấn đề liên quan đến khái niệm, tính chất và một số định lí điểm bất động trong không gian metric riêng, tôi đã thực hiện nghiên cứu luận văn của mình với tên gọi là: "*Một số định lí về điểm bất động trong không gian metric riêng và ứng dụng*".

Các nghiên cứu trong luận văn này được chia ra thành 2 chương:

• Chương 1: Không gian metric riêng: Trong chương này, tôi trình bày lại một số kiến thức cần phải nắm vững khi nghiên cứu về lí thuyết điểm bất động. Đây hầu hết là những những định nghĩa, tính chất... khá cơ bản, chẳng hạn như: không gian metric riêng, dãy Cauchy, dãy 0-Cauchy, sự hội tụ trong không gian metric riêng. Ngoài ra, tôi còn nghiên cứu về metric riêng Hausdorff và đưa một số ví dụ minh họa. Trong phần cuối của chương, tôi có trình bày một số tính chất cơ bản của không gian metric riêng để phục vụ cho các nội dung có trong Chương 2.

• Chương 2: Một số định lí về điểm bất động trong không gian metric riêng. Đây là phần trọng tâm của luận văn, tôi có trình bày chủ yếu về các kiến thức xoay quanh khái niệm điểm bất động trong không gian metric riêng cho một số các ánh xạ: ánh xạ giãn, ánh xạ co đơn trị .... Ngoài việc trình bày một cách có hệ thống các kiến thức, tôi đã đưa ra các ví dụ và bài tập nhằm giảm bớt tính trừu tượng của các khái niệm cũng như các định lí, mệnh đề đã được đề cập. Phần cuối cùng của chương, tôi có trình bày một ứng dụng của định lí điểm bất động trong không gian metric riêng, đó là sự tồn tại nghiệm chung của các phương trình tích phân kiểu Volterra.

Tôi đã cố gắng chọn lọc, sắp xếp để nội dung luận văn được ngắn gọn và phù hợp hơn, nhưng do thời gian và khuôn khổ của luận văn Thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chính vì vậy, tôi rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ phía các thầy cô giảng viên, các nhà nghiên cứu và các anh chị học viên Cao học để luận văn được hoàn thiện hơn.

Trong quá trình thực hiện luận văn này, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của thầy giáo Hà Trần Phương. Tôi xin chân thành gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy. Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, các thầy cô giáo và anh chị học viên lớp Cao học Toán K11A trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm, giúp đỡ, tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2019

Học viên Cao học

Ngô Thượng Thủy

Bảng kí hiệu

Trong toàn luận văn này, ta dùng một số kí hiệu sau

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp các số số thực
$\mathbb{R}^+$	tập hợp các số thực không âm
$\cup$	phép hợp
$\cap$	phép giao
$\times$	tích Descartes
$\emptyset$	tập hợp rỗng
id	ánh xạ đồng nhất
$\overline{A}$	bao đóng của tập hợp A
$B_p(x, \varepsilon)$	hình cầu mở tâm tại x, bán kính ε
$[a, b]$	đoạn đóng của tập số thực với các đầu mút a, b và $a < b$

Chương 1

Không gian metric riêng

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại định nghĩa, đưa ra một số ví dụ cụ thể và tập trung nghiên cứu một số tính chất cơ bản của không gian metric riêng. Đây là các kiến thức nền tảng, là cơ sở cho việc trình bày các nội dung trọng tâm trong Chương 2 của luận văn. Nội dung trong chương được trích dẫn chủ yếu từ các nguồn tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4], [6] và [8].

1.1 Định nghĩa và ví dụ về không gian metric riêng

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một tập hợp khác rỗng, một *metric riêng* trên X là một hàm số

$$p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

sao cho với mọi $x, y, z \in X$ ta có

(P1) $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

(P2) $p(x, x) \leqslant p(x, y)$;

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$;

(P4) $p(x, z) \leqslant p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Khi đó, cặp (X, p) được gọi là một *không gian metric riêng.*

Ví dụ 1.1.2. Cho $X = \mathbb{R}^+$ và $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm số xác định bởi $p(x, y) = \max\{x, y\}$, với mọi $x, y \in X$. Khi đó, (X, p) là một không gian metric

riêng. Thật vậy, rõ ràng p thỏa mãn Điều kiện (P1), (P2), (P3) của Định nghĩa 1.1.1 nên ta chỉ cần chứng minh p thỏa mãn Điều kiện (P4). Rõ ràng vai trò của x, z như nhau nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \leqslant z$. Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
&p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\\
\Leftrightarrow &\max\{x,z\} \leqslant \max\{x,y\} + \max\{y,z\} - \max\{y,y\}\\
\Leftrightarrow &z \leqslant \max\{x,y\} + \max\{y,z\} - y.\\
\Leftrightarrow &(\max\{x,y\} - y) + (\max\{y,z\} - z) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn thỏa mãn nên p thỏa mãn điều kiện (P4). Do đó (X, p) là một không gian metric riêng.

Ví dụ 1.1.3. Cho $X = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b\}$ và $p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm số cho bởi $p([a,b],[c,d]) = \max\{b,d\} - \min\{a,c\}$. Dễ thấy p thỏa mãn các Điều kiện (P1), (P2), (P3) của Định nghĩa 1.1.1. Đặt $x = [a,b], y = [c,d], z = [e,g]$. Vì vai trò của x, z như nhau nên không giảm tính tổng quát, ta chỉ xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a \leqslant b < e \leqslant g$. Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
&p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\\
\Leftrightarrow\ &g - a \leqslant \max\{b,d\} - \min\{a,c\} + \max\{d,g\} - \min\{c,e\} - d + c\\
\Leftrightarrow\ &(\max\{d,g\} - g) + (a - \min\{a,c\}) + (\max\{b,d\} - d) + (c - \min\{c,e\}) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối thỏa mãn.

Trường hợp 2: $a \leqslant e < b \leqslant g$.

Tương tự như trường hợp 1, ta cũng có $p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Trường hợp 3: $a \leqslant e \leqslant g \leqslant b$. Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
&p(x,z) \leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)\\
\Leftrightarrow\ &b - a \leqslant \max\{b,d\} - \min\{a,c\} + \max\{d,g\} - \min\{c,e\} - d + c\\
\Leftrightarrow\ &(\max\{b,d\} - b) + (a - \min\{a,c\}) + (\max\{d,g\} - d) + (c - \min\{c,e\}) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối thỏa mãn. Vậy p thỏa mãn Điều kiện (P4) nên p là một metric riêng trên X, hay (X, p) là một không gian metric riêng.

Nhận xét 1.1.4.

1. Một không gian metric luôn là một không gian metric riêng. Thật vậy, giả sử (X, p) là một không gian metric. Khi đó, rõ ràng (X, p) thỏa mãn các Điều kiện (P1), (P2), (P3) của Định nghĩa 1.1.1. Theo tiên đề tam giác ta có

$$\begin{aligned} p(x,z) &\leqslant p(x,y) + p(y,z) \\ &= p(x,y) + p(y,z) - 0 \\ &\leqslant p(x,y) + p(y,z) - p(y,y). \end{aligned}$$

Vậy (X, p) thỏa mãn Điều kiện (P4) nên nó là một không gian metric riêng.

2. Từ Định nghĩa 1.1.1, ta nhận thấy rằng nếu $p(x, y) = 0$ thì từ Điều kiện (P1), (P2), ta suy ra được $x = y$. Tuy nhiên điều ngược lại nhìn chung không còn đúng; nghĩa là nếu $x = y$ thì $p(x, y)$ chưa chắc đã bằng 0. Thật vậy, chẳng hạn trong Ví dụ 1.1.2 ta thấy $p(x, x) = x$ không nhất thiết phải bằng 0.

3. Cho (X, p) là một không gian metric riêng. Khi đó hàm $p_s : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi

$$p_s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

với mọi $x, y \in X$ là một metric trên X. Thật vậy, ta kiểm tra được

- $p_s(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $p_s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(y, x) - p(y, y) - p(x, x) = p_s(y, x)$.

Mặt khác, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} p_s(x,y) + p_s(y,z) &= [2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)] + [2p(y,z) - p(y,y) - p(z,z)] \\ &= 2\,[p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)] - p(x,x) - p(z,z) \\ &\geqslant 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) = p_s(x,z). \end{aligned}$$

Vậy p_s thỏa mãn 3 tiên đề của metric nên p_s là một metric trên X.

Định nghĩa 1.1.5. Cho (X, p) là một không gian metric riêng, $x \in X$ và $\varepsilon > 0$. Ta gọi tập hợp $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\}$ là một *p-hình cầu mở* tâm tại x, bán kính ε.